NO:
Date: 3/10/2017

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

- ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
- ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
- ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
- ΒΙΟΛΟΓΙΑ
- ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ
2. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ
3. ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ
4. ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ: είναι μια διάταξη αριθμών

Σύνολα αριθμών

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ φυσικοί αριθμοί

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ φυσικοί αριθμοί μαζί με το μηδέν

~~$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$~~

$\mathbb{Z} = \{\ldots -1, 0, +1, \ldots\}$ ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q} = \{\frac{\mu}{\nu}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}$ κ' $\nu \neq 0\}$ ρητοί αριθμοί

$\mathbb{R} =$ πραγματικοί αριθμοί

$\mathbb{C}$ μιγαδικοί αριθμοί

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

δεν έχουμε ισότητα συνόλων εφόσον δεν έχουν τα ίδια στοιχεία μέσα τους

π.χ! κάθε ακέραιος είναι ρητός
κάθε ρητός όμως δεν είναι ακέραιος

- Στα σύνολα αριθμών: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

NO:
Date:

*ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΧΑΡΑ Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

* ΚΑΙΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{N}$

ΔΕΝ ΕΧΟΥΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΕΦΟΣΟΝ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ ΤΑ ΙΔΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΣΑ ΤΟΥΣ

π.χ. καθε ακεραιος ειναι ρητος καθε όμως ρητος δεν ειναι ακεραιος!

• Στα σύνολα αριθμών: $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

ορίζονται πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού

-ΕΧΟΥΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η πρόσθεση ορίζεται απο το $\mathbb{Z}$ και μετά το ίδιο και ο πολλα- ~~πλασιασμος~~ πλασιασμός

Η διαίρεση ορίζεται απο $\mathbb{Q}$ και μετα ~~απ~~ αρκεί να υπάρχει ο περιορισμός ότι ο παρονομαστής θα είναι μη μηδενικός

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

|πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός

|προσθεση - πολλαπλασιασμός, αφαιρεση - διαίρεση

• Τα σύνολα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι παραδείγματα ΣΩΜΑΤΩΝ

Σώματα: είναι σύνολα μη κενα και έχουν τις ιδιοτητες των πράξεων $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ενα συνολο F το οποίο ειναι εφοδιασμενο με δυο πράξεις

πρόσθεση: $(x,y) \longmapsto x+y \in F, \ \forall x,y \in F$

πολλαπλασιασμός $(x,y) \longmapsto x \cdot y \in F \ \forall x,y \in F$ | *

* θα καλείται αυτό το σύνολο σώμα ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ ικανοποιού- νται οι ακόλουθες ιδιότητες

Scanned by CamScanner

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

NO:
Date:

① $\forall\ x, y, z \in F : (x+y)+z = (x+y)+z$

② $\forall\ x, y, \in F : \quad x+y = y+x$

③ $\exists\ 0 \in F \quad x+0 = x = 0+x \quad , \ \forall\ x \in F$

το σύμβολίζουμε έτσι επειδή έχει την ιδιότητα του μηδέν

④ $\forall\ x \in F \ , \ \exists -x \in F : x+(-x) = 0 - x + x$

⑤ $\forall x, y, z \in F : x(y.z) = (x.y).z$

⑦ $\forall\ x, y, z \in F : \begin{cases} x(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \\ (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \end{cases}$

⑧ $\exists\ 1 \in F : \forall x \in F : \ x\cdot 1 = x = 1\cdot x$ πολλ/σμου

→ ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη του

σύμβολο που έχει την ιδιότητα του 1

⑨ $\forall\ x \in F \ , \ x \neq 0 \ \exists\ x^{-1} \in F : x\cdot x^{-1} = 1 = x^{-1}\cdot x$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \in \mathbb{R} \ \ x, y \in \mathbb{Q}\}$

π.χ $F = \{A, \Pi\}$ για να είναι σώμα πρέπει να ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες

Έστω $\mathbb{K}$ σώμα $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$: παράδειγμα ενός 3×3 πίνακα με στοιχεία από το $\mathbb{Q}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν m, n δύο φυσικοί αριθμοί, τότε ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}$ είναι μια διάταξη $m\cdot n$ αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ σε σχήμα ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, ως εξής.

πόσες γραμμές
στήλες

NO:
Date:

$$
\begin{array}{c}
A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2j} & \alpha_{2n} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{ij} & \alpha_{in} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{mj} & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \\
\begin{array}{cccc} 1^{\eta} \text{ στήλη} & 2^{\eta} \text{ στήλη} & j^{\eta} \text{ στήλη} & n^{\eta} \text{ στήλη} \end{array}
\end{array}
$$

Σχόλια: Ένας $m \times n$ πίνακας αποτελείται από m το πλήθος γραμμές κάθε μια από τις οποίες έχει n το πλήθος στοιχεία, και από n το πλήθος στήλες κάθε μια από τις οποίες έχει m το πλήθος στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 3×2 πίνακας

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2×3 πίνακας

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 2×2 πίνακας (τετραγωνικός)

4. (4) 1×1 πίνακας

5. $(1 \ 2 \ 3)$ 1×3 πίνακας

6. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 3×1 πίνακας

~~ΟΡΙΣΜΟΣ~~ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:

Αν όπως και πριν, A είναι ένας $m\times n$ πίνακας τότε θα γράφαμε συντομογραφία $A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$ ή $A=(\alpha_{ij})$ ή $A=(A_{ij})$

Για παράδειγμα, έστω $A=(\min\{i,j\})_{3\times 3}$

Τότε $A=\begin{pmatrix} \min\{1,1\} & \min\{1,2\} & \min\{1,3\} \\ \min\{2,1\} & \min\{2,2\} & \min\{2,3\} \\ \min\{3,1\} & \min\{3,2\} & \min\{3,3\} \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθούν οι πίνακες

$$A=(2^{i+j})_{3\times 4}$$

$$B=(|i-j|)_{5\times 7}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας $m\times n$ πίνακας A καλείται τετραγωνικός εάν $m=n$

A,B σύνολα, τότε $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$

$A=\{1,2\}$ Τότε $A\times B=\{(1,4),(1,5)(1,6)(2,4)(2,5)(2,6)\}$

$B=\{4,5,6\}$ $(5,2)\notin A\times B$

ΟΡΙΣΜΟΣ: ~~Ένας $m\times n$ πίνακας A καλείται τε~~ Ένας $m\times n$ πίνακας A με στοιχεία από το $\mathbb{K}$ είναι μια συνάρτηση $A:\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}\to \mathbb{K}$, $A(i,j)=\alpha_{ij}\in\mathbb{K}$

Συμβολίζουμε με: $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$

Αν $m=n$, τότε θα γράφαμε

$M_{n\times n}(\mathbb{K})=M_n(\mathbb{K})$ το σύνολο όλων των $n\times n$ τετραγωνικών πινάκων

NO:
Date:

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΔΥΟ ΠΙΝΑΚΕΣ A και B οι οποίοι είναι $m \times n$ πίνακες καλούνται και θα γράφουμε $A = B \Leftrightarrow \alpha_{ij} = \beta_{ij}$ όπου $1 \le i \le m$

$1 \le j \le n$

δηλαδή το στοιχείο στην (i,j) θέση του πίνακα A είναι ίσο με το στοιχείο στην (i,j) θέση του πίνακα A είναι ίσο με το στοιχείο στην (i,j) θέση του πίνακα B

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Εστω $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ και $B = (\beta_{ij})_{m \times n}$ δύο $m \times n$ πίνακες. Το άθροισμα $A + B$ των πινάκων A και B ορίζεται ~~και~~ να είναι ο $m \times n$ πίνακας $(\alpha_{ij} + \beta_{ij})$, δηλαδή:

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

NO:
Date:

① Μεταθετικότητα: $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A+B=B+A$

$A=(\alpha_{ij})$ $A+B=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$ έπεται ότι $A+B=B+A$

$B=(\beta_{ij})$ $B+A=(\beta_{ij}+\alpha_{ij})$

② Προσεταιριστικότητα: $\forall A, B, \Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$

$A=(\alpha_{ij})$ $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$

$B=(\beta_{ij})$ $[A+(B+\Gamma)]_{ij}=(\alpha_{ij}+(B+\Gamma)_{ij})=(\alpha_{ij}+(\beta_{ij}+\gamma_{ij}))$

$\Gamma=(\gamma_{ij})$ $=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})+\gamma_{ij})=((A+B)_{ij}+\gamma_{ij})=$

$=((A+B)_{ij}+\Gamma_{ij})=[(A+B)+\Gamma]_{ij}$

Επειδή η παραπάνω ισότητα που ισχύει $\forall i=1,\dots,m$

$\forall j=1,\dots,n$

έπεται ότι $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$

③ Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς την πρόσθεση πινάκων

Θεωρούμε τον πίνακα $\mathbb{O}=(0)_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

Ο πίνακας $\mathbb{O}$ καλείται ο μηδενικός $m\times n$ πίνακας και έχει την ακόλουθη ιδιότητα

$\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A+\mathbb{O}=A+\mathbb{O}=A$

$(A+\mathbb{O}_{ij})=\alpha_{ij}+0=\alpha_{ij}=0+\alpha_{ij}$, $\forall i=1,m$ $\forall j=1,\dots,n$

④ Για κάθε πίνακα $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ύπαρξη του αντίθετου πίνακα A

$\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\exists -A\in M$: $A+(-A)=\mathbb{O}=(-A)+A$

Θέτουμε $-A=(-\alpha_{ij})$ Τότε $(A+(-A))_{ij}=(\alpha_{ij}+(-\alpha_{ij}))=0 \Rightarrow$

$A+(-A)=\mathbb{O}=(-A)+A$

Ο πίνακας $-A$ καλείται ο αντίθετος πίνακας του A

Για παράδειγμα αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ τότε $-A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & +1 & 0 \\ -3 & -1 & +2 & -1 \\ -4 & -1 & -2 & +1 \end{pmatrix}$

NO:
Date:

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

(ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ)

Εστω $A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$ ενας $m\times n$ πινακας με στοιχεία απο το σώμα $\mathbb{K}$ και έστω $\lambda\in\mathbb{K}$ ο βαθμωτός πολ/μος του λ με τον A ορίζεται να είναι ο $m\times n$ πινακας $\lambda\cdot A=\lambda\cdot\alpha_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1. $1\cdot A=A$
2. $0\cdot A=\mathbb{O}$
3. $(-1)\cdot A=-A$
4. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
5. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
6. $\lambda(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)A$

$$[\lambda\cdot(\mu\cdot A)]_{ij}=\lambda\cdot(\mu A)_{ij}=\lambda(\mu\cdot\alpha_{ij})=(\lambda\cdot\mu)\alpha_{ij}=[(\lambda\mu)A]_{ij}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Εστω $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & \omega\end{pmatrix}$

Αν ορίσουμε $A\cdot B=\begin{pmatrix}\alpha x & \beta\cdot y\\ \gamma z & \delta\cdot\omega\end{pmatrix}$ τότε όπως θα δούμε αργότερα δεν είναι ο σωστός πολλαπλασιασμός πινάκων

Αν ορίσουμε $A\cdot B=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta z & \alpha y+\beta\cdot\omega\\ \gamma\cdot x+\delta z & \gamma\cdot y+\delta\omega\end{pmatrix}$

Όπως θα δούμε αργότερα αυτός είναι ο "σωστός" τρόπος πολ/μω πινάκων

Scanned by CamScanner

NO:
Date:

Έστω $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$
$B = (B_{ij})_{n\times k}$

Τότε ορίζουμε το γινόμενο $A\cdot B$ του $m\times n$ πίνακα A με τον $n\times k$ πίνακα B να είναι ο $m\times k$ πίνακας ο οποίος ορίζεται ως $A\cdot B = (\gamma_{ij})_{m\times k}$, ~~όπου~~ $\cancel{\gamma_{ij} = (\alpha_{ij}, \alpha_{i2} \ldots \alpha_{in})}$

όπου $\gamma_{ij} = (\alpha_{ij}, \alpha_{i2} \ldots \alpha_{in})\begin{pmatrix} B_{ij} \\ B_{2j} \\ B_{nj} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij} B_{ij} + \alpha_{i2}B_{2j} + \ldots + \alpha_{in}B_{nj})$

$= \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{i\lambda} B_{\lambda j}$

10/10/2017

Αν A είναι $m\times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K} = (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$
Συμβολίζουμε με α_{ij} ή A_{ij} το στοιχείο του πίνακα A το οποίο είναι στην (i,j)-θέση δηλαδή το στοιχείο στην τομή i-γραμμής με την j-στήλη
Έτσι $A = (\alpha_{ij}) = (A_{ij})$
Έστω $A, B = (\alpha_{ij}) = (A_{ij})$
Έστω A, B δύο πίνακες το γινόμενο $A\cdot B$ ορίζεται αν και μόνο αν το πλήθος των στηλών του
A = πλήθος γραμμών του B Άρα αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in M_{k\times\lambda}(\mathbb{K})$ τότε
$n = k$
Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in M_{k\times\lambda}(\mathbb{K})$ Τότε ο πίνακας $A\cdot B$ ορίζεται, και είναι μεγέθους $m\times k$ και $(A\cdot B)_{ij} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{in})\begin{pmatrix} B_{ij} \\ B_{2j} \\ B_{nj} \end{pmatrix}$

$\alpha_{i1}\cdot B_{ij} + \alpha_{i2}\cdot B_{2j} + \ldots + \alpha_{in}B_{nj} = n$

$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{i\lambda} B_{\lambda i}$

NO:
Date:

Σχόλιο: Έστω A, B δύο πίνακες και υποθέτουμε οι πίνακες $A\cdot B$ και $B\cdot A$ είναι τετραγωνικοί ίδιου μεγέθους πράγματι αν $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{k\times\lambda}(K)$

Ο πίνακας $A\cdot B$ ορίζεται $\Rightarrow n=k$

Ο πίνακας $B\cdot A$ ορίζεται $\Rightarrow \lambda = m$ και επειδή $A\cdot B = B\cdot A \Rightarrow$
$m=n=k=\lambda$

π.χ $A=(1,2,3) \in M_{1\times 3}(K)$, $B=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(K)$ $\Bigg\}$ τότε $A\cdot B = (1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6)$

$A\cdot B = (4+10+18)$

όμως ο $B\cdot A$ δεν ορίζεται

π.χ $A\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 2×2 πίνακας

Οι πίνακες $A\cdot B$ και $B\cdot A$ ορίζονται

$\cancel{A\cdot B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}$ $A\cdot B\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1\\ 2\cdot 1+1(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}$

$A\cdot B\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$B\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 2\\ 1\cdot 1+(-1\end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 2 & 1(-1)+0\cdot 1\\ +1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & -1(-1)+1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Βλέπουμε ότι $A\cdot B \neq B\cdot A$

NO:
Date:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\forall n \geq 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Οι A, B είναι $n \times n$

$$A \cdot B \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = B \cdot A$ Αν και μόνο αν $n = 1$

$x \in \mathbb{R}$

- $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$

αν $x, y \in \mathbb{R}$

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = y$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -2(1) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

μηδενικός πίνακας

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1(-2) & 1(-1) + 1(2) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & + 1(-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$$

NO:
Date:

Άρα μπορούμε να έχουμε πίνακες $A, B: A \cdot B = 0$
Αλλά το $A \neq 0$ και το $B \neq 0$

Εστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \ \forall \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

Αν $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

τότε $\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Μαθηματική επαγωγή)

Ο πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή τα στοιχεία του είναι $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\forall A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) : A \cdot I_n = A = I_m \cdot A$

$$\underset{m\times n \ m\times n}{(A \cdot I_n)_{ij}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{i\lambda}(I_n)_{\lambda j} = \cancel{\alpha_{i1}(I_n)_{1j}}^{0} + \dots + \alpha_{ij}\cancel{(I_n)}_{jj} + \dots + \alpha_{in}\cancel{(I_n)}_{nj}^{0} = \alpha_{ij} = (A)_{ij}$$

Άρα οι πίνακες $A \cdot I_n$ και A έχουν ίδιο μέγεθος: $m\times n$
και τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες είναι ίσα.
Άρα $A \cdot I_n = A$ Παρόμοια $I_m \cdot A = A$
ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ $\forall M_n(\mathbb{K})$: $A \cdot I_n = A \cdot I_n \cdot A$
Εαν θα θέλαμε να μελετήσουμε δυνάμεις πινάκων
θα πρέπει $m = n$ (τετραγωνικοί)
Εστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας
$\forall k \geq 1$, ο πίνακας A^k ορίζεται ως εξής:
$k = 1$: $A^1 = A$
$k = 2$ $A^2 = A \cdot A$

NO:
Date:

Αν έχει οριοθεί ο πίνακας A^{k+1} ορίζεται να είναι ο $A^{k+1} = A^k \cdot A'$

Αν έχει οριοθεί A^k, τότε ο πίνακας A^{k+1} ορίζεται να είναι $A^k = A^k \cdot A$

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Τότε $A^2 = A \cdot A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

Αρα $A^2 = A$ αλλα $A \neq \mathbb{O}$ κ' $A = I_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = A \cdot A \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$ Άρα $A^2 = \mathbb{O}$ Αλλα το $A \neq \mathbb{O}$

Αν A, B, Γ είναι πίνακες και οι πίνακες $B \cdot \Gamma$ και ορίζονται τότε οι πίνακες $A \cdot B$ και $A(B\Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$ NOT SQRE ορίζονται και $A \cdot (B\Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ Ο πίνακας $B \cdot \Gamma$ ορίζεται

$B \in M_{k \times \lambda}(\mathbb{K})$ $\Rightarrow$ $\lambda = \mu$ και ο $B\Gamma$ έχει μέγεθος

$\Gamma \in M_{\mu \times \nu}(\mathbb{K})$ $k \times \nu$. Ο πίνακας $A(B \cdot \Gamma)$ ορίζεται $\Rightarrow$

$n = k$ και ο $A(B\Gamma)$ έχει μέγεθος $m \times n$

Επειδή $n = k$ ο πίνακας $A \cdot B$ ορίζεται και έχει μέγεθος $m \times \lambda$ Επειδή $\lambda = \mu$, ο πίνακας $(A \cdot B) \cdot \Gamma$ ορίζεται και έχει μέγεθος $m \times \nu$

Εαω οι πίνακες $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$ $\Gamma \in M_{k \times \lambda}(\mathbb{K})$

NO:
Date: 13/10/2017

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

$A=(\alpha_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Τότε $A\cdot B\in M_{m\times r}(\mathbb{K})$
$B=(\beta_{ij})\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ $(A\cdot B)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}$

① $A(B\cdot\Gamma)=(A\cdot B)\cdot\Gamma$ όταν ορίζονται οι πίνακες
② $\forall n\geq 1$ ορίζεται ο μοναδικός πίνακας

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

και $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
$A\cdot I_n=A=I_m\cdot A$

③ $A(B+\Gamma)=A\cdot B+A\cdot\Gamma$ || $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B,\Gamma\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$
$(A+B)\cdot\Gamma=A\Gamma+B\Gamma$ || $A,B\in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ $\Gamma\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$

$[A\cdot(B+\Gamma)]_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{i\lambda}(B+\Gamma)_{\lambda j}=\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{i\lambda}(\beta_{\lambda j}+\gamma_{\lambda i})$

$\sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_{i\lambda}\beta_{\lambda j}+\alpha_{i\lambda}\gamma_{\lambda j}=\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{i\lambda}\beta_{\lambda j}+\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{i\lambda}\gamma_{\lambda j}=(A\cdot B)_{ij}+(A\Gamma)_{ij}=$

$=(AB+A\Gamma)_{ij}$ $\forall i=1\ldots m$, $\forall j=1\ldots n$

$A(B+\Gamma)=A\cdot B+A\cdot\Gamma$

④ $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\forall B\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$: $(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$

$[(\lambda A)\cdot B]_{ij}=\sum_{p=1}^{n}(\lambda A)_{ip}\cdot\beta_{pj}=\sum_{p=1}^{n}\lambda\alpha_{ip}\cdot\beta_{pi}=\lambda\sum_{p=1}^{n}\alpha_{ip}\beta_{pj}$

$=\lambda(A\cdot B)_{ij}=[\lambda(A\cdot B)]_{ij}$ Άρα $(\lambda\cdot A)\cdot B=\lambda(A\cdot B$

ΔΥΝΑΜΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A\in M_n(\mathbb{K})$ τετραγωνικός πίνακας $n\times n$
$\forall m\geq 0$ η m-οστή δύναμη του A ορίζεται ως:

$A^0=I_n$	$A^2=A\cdot A$
$A^1=A$	$A^3=A^2\cdot A$

NO:
Date: 13/10/2017

Γενικά $A^{m+1} = A^m \cdot A^1$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $k, \lambda \in \mathbb{N}_0$

(1) $A^k \cdot A^\lambda = A^{k+\lambda}$

(2) $(A^k)^\lambda = A^{k\cdot\lambda}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της (1) Σταθεροποιούμε το $k \in \mathbb{N}_0$

- Αν $\lambda = 0$ τότε $A^k \cdot A^0 = A^k \cdot I_n = A^k = A^{k+0}$ Άρα η (1) ισχύει για $\lambda = 0$
- Αν $\lambda = 1$ τότε $A^k \cdot A^1 = A^{k+1}$ Άρα η (1) ισχύει για $\lambda = 1$
- Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει η (1) για $\lambda = m$

τότε $A^k A^m = A^{k+m}$ και $A^k \cdot A^{m+1} = A^k (A^m \cdot A^1) = (A^k \cdot A^m) \cdot A^1$

επαγωγική υπόθ. $A^{k+m} \cdot A^1 = A^{k+m+1}$

από την αρχή μαθηματικής επαγωγής η (1) ισχύει για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{N}_0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Έστω $P(n)$: Μαθηματική πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \in \mathbb{N}$

(1) • Αν η $P(1)$ είναι αληθής
• Αν η $P(n)$ αληθής ↳ επαγωγική υπόθεση

Τότε η $P(n)$ είναι αληθής, $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) • Αν η $P(1)$ είναι αληθής
• Αν η $P(i)$ είναι αληθής για κάθε $k: 1 \leq k \leq n$ ⇒ $P(n+1)$ αληθής

Τότε η $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

NO:
Date: 13/10/2017

~~[illegible]~~ ΚΛΑΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

① $\mathbb{O}$ μηδενικός πίνακας $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\forall m,n \geq 1$ $*_1$

② $\forall n \geq 1$ I_n ο μοναδικός πίνακας $\in M_n(\mathbb{K})$ $*_2$

③ Βαθμωτός πίνακας $\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & k \end{pmatrix}$

④ Διαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \cdots & \alpha_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n} \end{pmatrix}$$

$A = \alpha_{ij}$ $\alpha_{ij} = 0$ αν $i > j$

⑥ Αυστηρά άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \alpha_{2} & \alpha_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = (\alpha_{ij})$ $\alpha_{ij} = 0$, αν $i \geq j$

Παρόμοια ορίζουμε τους κάτω τριγωνικούς πίνακες και τους αυστηρά κάτω τριγωνικούς πίνακες

$*_1$

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$*_2$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NO:
Date: 13/10/2017

⑦ Ένας πίνακας A καλείται ταυτοδύναμος $\Leftrightarrow$ $A^2 = A$

π.χ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ταυτοδύναμος

⑧ Ένα πίνακας A καλείται μηδενοδύναμος $\Leftrightarrow$ $\exists\, \kappa \in \mathbb{N} : A^{\kappa} = \mathbb{O}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

$\Downarrow$
μηδενοδύναμος

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας (τετραγωνικός) $n\times n$ πίνακας A καλείται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει $n\times n$ πίνακας B: $A\cdot B = I_n = B\cdot A$

ΣΧΟΛΙΟ: Ο πίνακας B του ορισμού είναι μοναδικός $\cdot\ AB = I_n = B\cdot A$

Έστω $B = \Gamma$ $\quad \cancel{A\Gamma = I_n = \Gamma A}$ $\quad \cancel{A\cdot B = I_n = B\cdot A}$ $\quad A\Gamma = I_n = \Gamma\cdot A$

$\cancel{A\cdot B}$ $\quad B = B\cdot I_n = B(A\Gamma) = (BA)\Gamma = I_n\cdot\Gamma = \Gamma$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ο πίνακας B: $A\cdot B = I_n = B\cdot A$ είναι μοναδικός, συμβολίζεται με A^{-1} και καλείται ο αντίστροφος του A

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Αναζητούμε πίνακα $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$: $A\cdot B = I_2 = B\cdot A$

NO:
Date: 13/10/2017

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

① Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο αντίστροφος του A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$

A: αντιστρέψιμος $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow$ ο A^{-1} αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$

② Έστω A, B = αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

$B \cdot B^{-1} = I_n = B^{-1} \cdot B$

$A \cdot B \cdot B^{-1} A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$ Παρόμοια $B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot AB = I_n$

Άρα ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Αν $A_1, A_2, \dots A_k$ είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες τότε ο $A_1 A_2 \dots A_k$ είναι αντιστρέψιμος και

$(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$

17/10/2017

ΙΧΝΟΣ & ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Τότε ο ανάστροφος του A ορίζεται να είναι ο πίνακας ${}^tA$ ο οποίος είναι $n \times m$ και $\boxed{({}^tA)_{ij} = A_{ji}}$
Με άλλα λόγια ο πίνακας ${}^tA$ προκύπτει από τον A μετατρέποντας τις γραμμές του A σε στήλες του ${}^tA$ και τις στήλες του A σε γραμμές του ${}^tA$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, τότε ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

① $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) : {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

Απόδειξη: $[{}^t(A+B)]_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = ({}^tA + {}^tB)_{ij}$ Άρα ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

NO:
Date: 17/10/2017

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): {}^t(\lambda \cdot A) = \lambda\, {}^tA$

$[{}^t(\lambda A)]_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda \cdot A_{ji} = \lambda\, ({}^tA)_{ij} = (\lambda \cdot {}^tA)_{ij} \Rightarrow$

${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda\, {}^tA$

③ $\forall A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): {}^t({}^tA) = A$

$[{}^t({}^tA)]_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij} \Longrightarrow {}^t({}^tA) = A$

④ $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}): {}^t(A\cdot B) = {}^tB\, {}^tA$

Απόδειξη: $[{}^t(A\cdot B)]_{ij} = [(A\cdot B)_{ji}] = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\cdot B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk}$

$= \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik} ({}^tA)_{kj} = ({}^tB \cdot {}^tA)_{ij} \Rightarrow {}^t(A\cdot B) = {}^tB\, {}^tA$

⑤ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν ο A αντιστρέψιμος ~~και~~ τότε και ο ${}^tA$ είναι αντιστρέψιμος και: $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

A αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ υπάρχει ο A^{-1} και $A\cdot A^{-1} = I_n = A^{-1}\cdot A$ Τότε

${}^t(A\cdot A^{-1}) = {}^tI_n = {}^t(A^{-1}\cdot A) \Rightarrow {}^t(A^{-1})\, {}^tA = I_n = {}^tA\, {}^t(A^{-1}) \Rightarrow$ Ο ${}^tA$ αντιστρέψιμος

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας πίνακας A καλείται συμμετρικός $\Leftrightarrow {}^tA = A$ (αν και μόνο αν)

Άρα ο A: συμμετρικός $\Leftrightarrow {}^tA = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ({}^tA)_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A_{ji} = A_{ij}$

$\Leftrightarrow$ τα στοιχεία του A είναι συμμετρικά ως προς την διαγώνιο του A

Ένας πίνακας A καλείται αντισυμμετρικός $\Leftrightarrow {}^tA = -A$

Τότε ο A αντισυμμετρικός $\Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow ({}^tA)_{ij} = (-A_{ij}) \Leftrightarrow A_{ji} = -A_{ij}$

$i,j = 1 \ldots n$ $\Rightarrow A_{ii} = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$

(η διαγώνιος του είναι μηδέν αν είναι αντισυμμετρικός πίνακας)!!

Scanned by CamScanner

NO:
Date: 17/10/2017

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Το ίχνος του A ορίζεται να είναι ο αριθμός:
$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ Τότε $Tr(A) = 1+7+4 = 12$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΧΝΟΥΣ

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}): Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

$Tr(A+B) = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{k \cdot k} = \sum_{k=1}^{n} (A_{k \cdot k} + B_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk} + \sum_{k=1}^{n} B_{kk}$

$= Tr(A) + Tr(B)$

2. $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$
3. $Tr(\mathbb{O}) = 0$ και $Tr(I_n) = n$
4. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}): Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$ [αποδ. σαν άσκηση]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Tr(A) = 3$
$Tr(B) = 2$ | $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Tr(A \cdot B) = 0}$

Άρα $Tr(A \cdot B) = 0 \neq Tr(A) \cdot Tr(B) = 6$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Tr(B \cdot A) = 0}$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

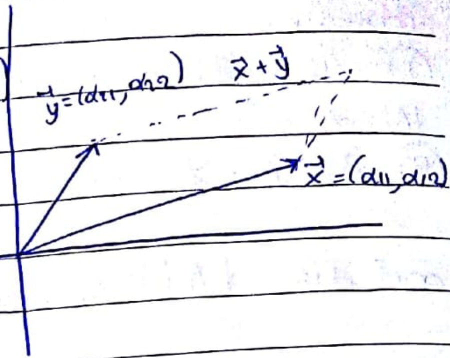
1. Η εξίσωση $ax = B$ όπου $\alpha, B \in \mathbb{K}$ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$
2. Εσω το σύστημα: $(\Sigma) \begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 = B_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 = B_2 \end{cases}$ $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$

$-\alpha_{21} \cancel{\alpha_{11}} x_1 - \alpha_{21}\alpha_{12} x_2 = -\alpha_{21} B_1$
$\alpha_{11} \cancel{\alpha_{21}} x_1 + \alpha_{11}\alpha_{22} x_2 = \alpha_{11} B_2$ || $\boxed{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})} x_2 = \alpha_{11} B_2 - \alpha_{2}$

NO:

Date: 17/10/2017

Το εμβαδό του παραλληλόγραμμου το οποίο σχηματίζεται από τα ~~στοιχεία~~ σημεία $O=(0,0)$ $\vec{y}=(\alpha_{21},\alpha_{22})$, $\vec{x}+\vec{y}=(\alpha_{11}+\alpha_{21},\alpha_{12}+\alpha_{22})$ είναι ίσο με: $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$



ΣΚΟΠΟΣ: Η κατασκευή μιας συνάρτησης $D: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{K}$,

$A\longmapsto D(A)=|A|$, $\forall n\geq 1$

η οποία δίνει όσο γίνεται περισσότερες πληροφορίες για τον A

Θέλουμε ιδιαίτερα: A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

Η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης θα γίνει επαγωγικά

(1) Αν $n=1$, δηλαδή $A\in M_{1\times 1}(\mathbb{K})$ τότε $A=(\alpha)$ και ορίζουμε:

$|A|=\alpha$

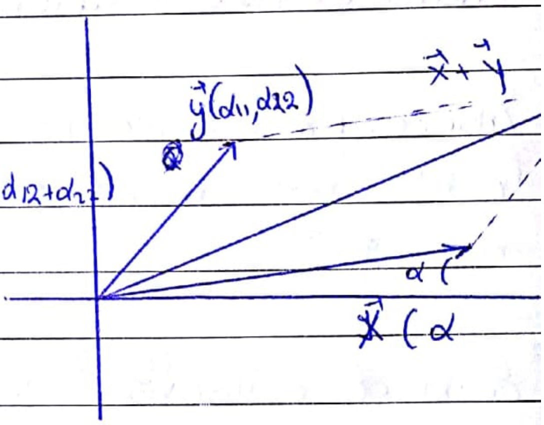
(2) Αν $n=2$, δηλαδή $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})$, τότε ορίζουμε:

$|A|=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$

$=(-1)^{1+1}\alpha_{11}|(\alpha_{22})|+(-1)^{1+2}|(\alpha_{21})|$

20/10/2017

Το εμβαδό του παρ/μου το οποίο σχηματίζεται από τα σημεία $O=(0,0)$ $\vec{y}=(\alpha_{21},\alpha_{22})$, $\vec{x}=(\alpha_{11},\alpha_{12})$ $\vec{x}+\vec{y}=(\alpha_{11}+\alpha_{21},\alpha_{12}+\alpha_{22})$ είναι ίσο με $\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}=\alpha_{12}\alpha_{21}$



ΣΚΟΠΟΣ: Η κατασκευή μια συνάρτησης

$D: M_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ $A\to P(A)=|A|$ $\forall n\geq 1$

η οποία να δίνει όσο γίνεται περισσότερες πληροφορίες για τον A Θέλουμε ιδιαίτερα A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

NO:
Date: 20/10/2017

Η κατασκευή μιας τέτοια συνάρτησης θα γίνει επαγωγικά:

① Αν $n=1$ δηλαδή $A \in M_{1}(\mathbb{K})$ τότε $A=(\alpha)$ και ορίζουμε: $|A|=\alpha$

② Αν $n=2$, δηλαδή $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ τότε

ορίζουμε $|A|=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}=(-1)^{1+1}\alpha_{11}\cdot|(\alpha_{22})|+(-1)^{1+2}|(\alpha_{21})|$

Έστω $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ ← i γραμμή

j στήλη   n στήλη

• αν $n=1$ τότε $A=(\alpha_{11})$ και τότε η ~~ορίζεται~~ ορίζουσα του A να είναι ο αριθμός α_{11} και τότε γράφουμε $\det A=\alpha_{11}$ ή $|A|=\alpha_{11}$

• αν $n=2$ $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ και η ορίζουσα $\det A$ ή $|A|$

ορίζεται να είναι ο αριθμός $\det A=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}$

Υποθέτουμε ότι: έχουμε ορίσει την ορίζουσα πίνακα μεγέθους $(n-1)\times(n-1)$ με τον τρόπο που κάναμε για τις περιπτώσεις $n=1,2,3$.

Έστω ότι ο πίνακας A είναι μεγέθους $n\times n$. Τότε η ορίζουσα

$\det A$ ή $\det A=(-1)^{1+1}\alpha_{11}\det\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{πίνακας } (n-1)\times(n-1)}+(-1)^{1+2}\alpha_{12}\det\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n3} & \dots \end{pmatrix}}_{\text{πίνακας } (n-1)\times(n-1)}$

$+\dots+(-1)^{1+n}\det\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,n-1} \end{pmatrix}}_{\text{πίνακας } (n-1)\times(n-1)}$

NO:
Date: 20/10/2017

Τότε $\det A = (-1)^{1+1}\alpha_{11}|(\alpha_{22})| + (-1)^{1+2}\alpha_{12}|(\alpha_{21})|$

$n=3$ Τότε $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ και η ορίζουσα $\det A$ ή $|A|$

του Α ορίζεται να είναι ο αριθμός $\det A = (-1)^{1+1}\alpha_{11}\det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} +$
$+(-1)^{1+2}\alpha_{11}\det\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\alpha_{23}\det\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} =$

$= \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})$
$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{23}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Τότε $\det A = (-1)^{1+1}2\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
$+ (-1)^{1+3}\cdot 1\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 4 + (-5) = 8-5 = 3$

ΚΑΝΟΝΑΣ SARRUS

Τότε $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} -$
$- \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$

π.χ. $\left(\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ $\det A = 8 - 1 - 4 = 8 - 5 = 3$

(Διαφορετικός τρόπος ο κανόνας Sarrus + πιο εύκολος)

NO:
Date: 20/10/2017

Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει την ορίζουσα πίνακα μεγέθους $(n-1)\times(n-1)$ με τον τρόπο που κάναμε για τις περιπτώσεις $n=1,2,3 \dots$

Έστω ότι ο πίνακας A είναι μεγέθους $n\times n$. Τότε η ορίζουσα $\det A$ ή $|A|$ του A ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\det A = (-1)^{1+1}\alpha_{11}\det\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}}_{\text{πίνακας } (n-1)\times(n-1)} + (-1)^{1+2}\alpha_{12}\det\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n3} & & \alpha_{nn}\end{pmatrix}}_{\text{πίνακας } (n-1)\times(n-1)} +$$

$$+ \dots + (-1)^{1+n}\det\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n-1}\\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nn-1}\end{pmatrix}}_{\text{πίνακας } (n-1)\times(n-1)}$$

Ο αριθμός $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ καλείται συμπαράγοντας του στοιχείου α_{ij} κάθε $i,j=1\dots n$ όπου Δ_{ij} είναι η ορίζουσα του $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας ο οποίος προκύπτει αν διαγράψω από τον A την i-γραμμή και την j-στήλη. Συνήθως θα γράφουμε $A=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

$$\det A = \alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\dots+\alpha_{1n}A_{1n}$$

ανάπτυγμα της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής

Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής:

$\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\dots+\alpha_{1n}A_{1n}$

— // — // — // — 2η γραμμής

$\alpha_{21}A_{n1}+\alpha_{n2}A_{n2}+\dots+\alpha_{nn}A_{nn}$

— // — // — // — // — 3ης γραμμής

$\alpha_{n1}A_{n1}+\alpha_{n2}A_{n2}+\dots+\alpha_{nn}A_{nn}$

— // — // — // — i-ης γραμμής

$\boxed{\alpha_{ij}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\dots+\alpha_{in}A_{in}}$ Γενικά

Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά τα στοιχεία της j-στήλης του A:

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}A_{ij}$

NO:
Date: 20/10/2017

ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ } ~~ΘΕΩΡΗΜΑ: Για κάθε $i=1,\dots,n$ και για κάθε $j=1,\dots,n$ ισχύει ότι:~~
$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+3} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -6$$

ΚΑΝΟΝΑΣ: 1 Αν ένας πίνακας A έχει μια γραμμή ή μια στήλη ίση με μηδέν (δηλαδή όλα τα στοιχεία είναι 0) τότε $\det A = 0$

ΚΑΝΟΝΑΣ 2 Αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας τότε $\det A = a_{11} a_{22} + \dots + a_{nn}$

Απόδειξη

- Αν $n=1$, τότε $A = (a_{11})$ και $\det A = a_{11}$
- Αν $n=2$, τότε $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ και $\det A = a_{11} \cdot a_{22}$

Επαγωγική υπόθεση: Η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων.

$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Επαγωγική υπόθεση}}{=} a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

άνω τριγωνικός πίνακας $(n\times1)(n\times1)$

$S_n = \{ f : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\} \mid f : 1-1$ και επί απεικόνιση $\}$

$\forall f \in S_n$ ορίζεται το πρόσημο $\varepsilon(f)$ της μετάθεσης f και

$$\varepsilon(f) = \begin{cases} 1 & , f \text{ άρτιος} \\ -1 & f \text{ περιττός} \end{cases}$$

NO:
Date:

<u>Π.χ</u> $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ τότε: $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \alpha_{1\sigma(1)} \cdot \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$

<u>$n=2$</u> Έστω $\sigma \in S_2$ δηλαδή $\sigma: \{1,2\} \to \{1,2\}$ 1-1 και επί

$\sigma(1)=1 \Rightarrow \sigma(2)=2$

$\sigma(1)=2 \Rightarrow \sigma(2)=1$

<u>$n=3$</u> $\left\{\begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{matrix}\right\}$

$\left\{\begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}\right\}$ Θα τα δούμε στις δομές του χρόνου

Παράδειγμα: Γενικά: $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Τότε $\det A = 0 = \det B$ όμως $\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det \emptyset = 0$
- $\det I_n = 1$
- $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Από τώρα και στο εξής θα γράφουμε: $|A| = \det A$

<u>ΚΑΝΟΝΑΣ 3</u>: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \lambda\alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \lambda\alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{ni} & \lambda\alpha_{nj} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

NO:
Date: 20/10/2017

$|\lambda A| \neq \lambda |A|$

$\hookrightarrow \lambda^n |A|$

ΚΑΝΟΝΑΣ 4:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1j}+\alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2j}+\alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots \alpha_{nj}\,\alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{nj} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \dots & \alpha_{2j} \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} \dots & \alpha_{nj} \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ 5 $\quad |\lambda A| = \lambda^n |A|$ όπου $M_n(\mathbb{K})$

ΚΑΝΟΝΑΣ 6 $\quad$ Αν ο πίνακας A έχει δύο στήλες ίσες

τότε $|A|=0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1j} & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{2i} & & \alpha_{2j} & \alpha_{2k} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \alpha_{nk} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \Sigma & & \uparrow \Sigma_j & \uparrow \Sigma_k & & \uparrow \Sigma_n \end{matrix} \end{array} \xrightarrow{\Sigma_i \mapsto \Sigma_j + \lambda \Sigma_k} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1j}+\lambda\alpha_{1k} & \alpha_{1k} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2j}+\lambda\alpha_{2k} & \alpha_{2k} & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nj}+\lambda\alpha_{nk} & \alpha_{nk} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \Sigma_1' & \uparrow \Sigma_j' & \uparrow \Sigma_k' & \uparrow \Sigma_n' \end{matrix} \end{array} = A'$$

Τότε $|A|=|A'|$: Η ορίζουσα ενός πίνακα δεν αλλάζει αν σε μία τυχούσα στήλη του προσθέσω πολλαπλάσιο μιας άλλης στήλης

ΚΑΝΟΝΑΣ 7 $\quad$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2j} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nj} & \alpha_{nk} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \Sigma_1 & \uparrow \Sigma_j & \uparrow \Sigma_k & \uparrow \Sigma_n \end{matrix} \end{array} \xrightarrow{\Sigma_j \leftrightarrow \Sigma_k}$$

NO:
Date: 20/10/2017

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1k} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{21} & \alpha_{2k} & \alpha_{2j} & \alpha_{2k} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} \dots & \alpha_{nk} \dots & \alpha_{nj} \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} = A'$$

Τότε $|A'| = -|A|$. Η ορίζουσα ενός πίνακα, αλλάζει πρόσημο αν εναλλάξουμε δύο στήλες του πίνακα.

ΚΑΝΟΝΑΣ 8 $\quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

ΚΑΝΟΝΑΣ 9 $\quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad |{}^{t}A| = |A|$: Όλοι οι κανόνες που έχουμε μάθει για τις στήλες ισχύουν και για γραμμές

ΑΣΚΗΣΗ 1η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \beta+\alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \beta+\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \beta+\alpha \end{vmatrix} = 0$$

είναι μηδέν γιατί όταν δύο γραμμές ή στήλες είναι ίδιες τότε ο πίνακας ισούται με μηδέν.

ΑΣΚΗΣΗ 2η

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \alpha^2-\beta^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

NO:
Date: 20/10/2017

$\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3$

$$= \begin{vmatrix} (\alpha-\beta)\cdot 0 & 1 & 1 \\ \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \beta-\gamma & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma \end{vmatrix}$$

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\cancel{\beta}+\gamma-\alpha-\cancel{\beta}) = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

24/10/2017

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Ο συμπαράγοντας του στοιχείου α_{ij} είναι ο αριθμός $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ όπου Δ_{ij} η ελάσσονα ορίζουσα τάξης $n-1$: δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη.

Τότε: $|A| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}A_{ij} = \alpha_{i1}A_{i1} + \dots + \alpha_{in}A_{in}$ } ανάπτυγμα ορίζουσας κατά τα στοιχεία της i-γραμμής

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}A_{ij} = \alpha_{1j}A_{1j} + \dots + \alpha_{nj}A_{nj}$ } ανάπτυγμα ορίζουσας κατά τα στοιχεία της j-στήλης

• $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j}+\alpha'_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj}+\alpha'_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = (\alpha_{1j}+\alpha'_{1j})A_{1j} + \dots + (\alpha_{nj}+\alpha'_{nj})A_{nj} =$$
$$= (\alpha_{1j}A_{1j} + \dots + \alpha_{nj}A_{nj}) + (\alpha'_{1j}A_{1j} + \dots \alpha'_{nj}$$

j στήλη

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha'_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & & \alpha'_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

NO:
Date: 24/10/2017

- $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \lambda\alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \alpha_{1j} A_{1j} + \dots + \lambda \alpha_{nj} A_{nj} = \lambda(\alpha_{1j}A_{1j} + \dots + \alpha_{nj}A_{nj}) = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

j στήλη

- $$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1j} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{n1} & \dots & \lambda\alpha_{nj} & \dots & \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = *$$

Αποδ. με χρήση επαγωγής

- Αν το $n=1$ $|\lambda\alpha_{11}| = \lambda\alpha_{11} = \lambda|\alpha_{11}| \Rightarrow$ η σχέση * ισχύει

- Αν το $n=2$, τότε $\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2\alpha_{11}\alpha_{22} - \lambda^2\alpha_{21}\alpha_{12} =$

$\lambda^2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \lambda^2|A|$

Άρα η σχέση * ισχύει

Επαγωγική υπόθεση: Για κάθε $k<n$ και για κάθε $k \times k$ πίνακα B: $|\lambda \cdot B| = \lambda^k |B|$

ΠΑΡΑΤΗΡΩ: ότι οι κύκλοι είναι η ελ. ορίζουσα του πίνακα A'

Για $k=n$, θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{n1} & \dots & \lambda\alpha_{nj} & \dots & \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\alpha_{1j}A'_{1j} + \dots + \lambda\alpha_{nj}A'_{nj} = \lambda(\alpha_{1j}A'_{1j} + \dots + \alpha_{nj}A'_{nj})$$
$$= \lambda(\alpha_{1j}\lambda^{n-1}A_{1j} + \dots + \alpha_{nj}\lambda^{n-1}A_{nj}) =$$
$$= \lambda^n(\alpha_{1j}A_{1j} + \dots + \alpha_{nj}A_{nj})$$
$$= \lambda^n|A|$$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda\alpha_{n1} & \dots & \lambda\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

NO:

Date: 24/10/2017

ΑΣΚΗΣΗ 1 # Να βρούμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 + 4\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \mapsto 3\Gamma_1 \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[-(-)]{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + \Gamma_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-30-4) = 2(-34) = -68$$

NO:

Date: 24/10/2017

ΑΣΚΗΣΗ 2# Να βρεθεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix}$$

* με επαγωγή (δύσκολο)

* με αφαίρεση της μιας γραμμής με την άλλη.

$\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \Gamma_1$, $\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1$, $\Gamma_n \mapsto \Gamma_n - \Gamma_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3\# Να βρεθεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & \cdots & x \\ x & -1 & x & \cdots & x \\ x & x & -1 & \cdots & x \\ x & x & x & \cdots & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \mapsto \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n} \begin{vmatrix} (-1)+(n-1)x & x & x & \cdots & x \\ (-1)+(n-1)x & -1 & x & \cdots & x \\ (-1)+(n-1)x & x & -1 & \cdots & x \\ (-1)+(n-1)x & x & x & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \big((-1)+(n-1)x\big) \begin{vmatrix} 1 & x & x & & x \\ 1 & -1 & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_n \mapsto \Gamma_n - \Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \Gamma_1} ((-1)+(n-1)x$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x & & x \\ 0 & -1-x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1-x \end{vmatrix} \Rightarrow \big((-1)+(n-1)x\big)\cdot(-1-x)^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1}\big((-1)+(n-1)x\big)(x+1)^{n-1}$$

NO:
Date: 23/10/2017

ΑΣΚΗΣΗ 4## Υπολ. την ορίζουσα

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

* όταν υπάρχει επαναλ. μοτίβο πρέπει να βρούμε μια σχέση που θα συνδέει μια αναδρομική σχέση

$$|A_n| = 3|A_{n-1}| - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3|A_{n-1}| - 2|A_{n-2}|$$

Άρα $\boxed{A_n = 3|A_{n-1}| - 2|A_{n-2}|}^{*}$ κρατάμε αυτή την σχέση

Μαντεύουμε την σχέση

- $|A_1| = |(3)| = 3 = 2^{1+1} - 1$
- $|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7 = 2^{2+1} - 1$
- $|A_3| = 3|A_2| - 2|A_1| = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 21 - 6 = 15 = 2^{3+1} - 1$

άρα η ορίζουσα που μαντεύουμε είναι: $|A_n| = 2^{n+1} - 1$

Επαγωγική υπόθεση: Για κάθε κ: $3 \leq \kappa \leq n$: $|A_\kappa| = 2^{\kappa+1} - 1$

Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η επαγωγική υπόθεση ισχύει για $\kappa=1$

$|A_{n+1}| \overset{*}{=} 3|A_n| - 2|A_{n-1}| \underset{\text{επαγ. υποθ.}}{=} 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) =$
$= 3 \cdot 2^{n+1} - 3 - 2 \cdot 2^n + 2 = 2^{n+2} - 1$

Από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής $\Rightarrow |A_n| = 2^{n+1} - 1, \ \forall n \geq 1$

Scanned by CamScanner

ΑΣΚΗΣΗ (5) Εσω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας αντισυμμετρικός ($^tA = -A$) πίνακας. Αν ο n περιττός, τότε $|A| = 0$

NO:
Date: 23/10/2017

A: αντισυμμετρικός $\Rightarrow {}^tA = -A \Rightarrow |{}^tA| = |-A| \Rightarrow |A| = (-1)^n |A|$

Επειδη n περιττός $\Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$

Αν n: αρτιος, τότε γενικά $|A| \neq 0$ π.χ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

27/10/2017

Εσω $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij} = \alpha_{ij} A_{ij} + \dots + \alpha_{nj} A_{nj}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij} = \alpha_{i1} + A_{i1} + \dots + \alpha_{in} A_{in}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ όπου Δ_{ij}: $n(n-1)\times(n-1)$ ελάσσονα ορίζουσα του α_{ij}: δηλαδη η ορίζουσα που προκύπτει αν απο τον A διαγράψουν με την i-γραμμή και την j-στήλη

ΟΡΙΣΜΟΣ Ο προσαρτημένος πίνακας του A ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ δηλαδη $[\mathrm{adj}(A)]_{ij} = A_{ji}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -11 & 9 & -14 \\ 4 & -12 & -8 \\ -9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9$

NO:
Date: 27/10/2017

$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$ $\quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -14$ $\quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8$ $\quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$: $A \cdot adj(A) = |A| I_n = adj(A) \cdot A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\forall i,j = 1,2,\dots,n$: $[A \cdot adj(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (adj(A))_{kj} =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$

① Έστω $i=j$ Τότε: $[A \cdot adj(A)]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = |A|$

② Έστω ότι $i \neq j$. Τότε: $[A \cdot adj(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$

Θεωρούμε τον πίνακα $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ i-γραμμή, j-γραμμή

ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A' κατά τα στοιχεία της j-γραμμής $= |A'| = 0$ διότι ο A' έχει δύο γραμμές ίσες

Άρα $[A \cdot adj(A)]_{ij} = \begin{cases} |A|, & αν\ i=j \\ 0, & αν\ i \neq j \end{cases}$ Άρα $A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$

Παρόμοια δείχνουμε ότι $adj(A) \cdot A = |A| \cdot I_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$, τότε: A: αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ και αν $|A| \neq 0$ τότε $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Rightarrow$" Έστω ότι ο A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists$ ο A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

$|A \cdot A^{-1}| = |I_n| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $|A| \neq 0$ Τότε στη σχέση $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I_n = adj(A) \cdot A$:

$A\left(\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)\right) = I_n = \left(\frac{1}{|A|} adj(A)\right) \cdot A \Rightarrow$ ο A: αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$

NO:
Date: 27/10/2017

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ και

έστω $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ $\quad A_{11} = \delta$, $A_{12} = -\gamma$, $A_{21} = -\beta$, $A_{22} = \alpha$

Τότε $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A = (\alpha_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{ij} & \alpha_{in} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{mj} & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ \quad\quad\quad\quad j\text{-στήλη} \end{array} \leftarrow i\text{-γραμμή}$

Στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A:

① Αντικαθιστούμε την i-γραμμή του A με τη γραμμή η οποία προκύπτει αν στην i-γραμμή προσθέσουμε λ φορές την j-γραμμή

$\Gamma_i \longmapsto \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$, $1 \leq i,j \leq m$ $\lambda \in \mathbb{K}$

② Αμοιβαία εναλλαγή δύο γραμμών, για παράδειγμα της i-γραμμής με την j-γραμμή.

$\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j$, $1 \leq i,j \leq m$

③ Πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή με ένα μη-μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$:

$\Gamma_i \longmapsto \lambda\Gamma_i$, $1 \leq i \leq m$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1 \mapsto \frac{1}{2}\Gamma_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cancel{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{7}\Gamma_2}]{\cancel{\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{7}\Gamma_3}} \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_2}$

Scanned by CamScanner

NO:
Date: 27/10/2017

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{7}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 3\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι ακόλουθοι τετραγωνικοί πίνακες καλούνται στοιχειώδεις πίνακες:

① $E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots 1 & & \lambda \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & & \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{\Gamma_i \mapsto \Gamma_i + \lambda\Gamma_j} I_n$

② $E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j} I_n$

③ $E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{\Gamma_i \mapsto \lambda\Gamma_i} I_n$

$\lambda \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12}(\lambda)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = E_{21}(\lambda)$

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}$, $E_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq$

$E_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}\mathbb{K}$

① $A \xrightarrow{\Gamma_i \mapsto \Gamma_i + \lambda\Gamma_j} A' = E_{ij}(\lambda) \cdot A$

② $A \xrightarrow{\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j} A' = E_{ij} \cdot A$

③ $A \xrightarrow[\lambda \neq 0]{\Gamma_i \mapsto \lambda\Gamma_i} A' = E_i(\lambda) \cdot A$

NO:
Date: 27/10/2017

$E_{ij}(\lambda), E_{ij}, E_i(\lambda) \in M_m(\mathbb{K})$

$$E_{ij}(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots 1 \cdots & \lambda & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & & \alpha_{in} \\ \alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{jn} \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

i-γραμμή →

j-στήλη

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{i1}+\lambda\alpha_{j1} & \cdots & \alpha_{in}+\lambda\alpha_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = A'$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + \lambda\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 7+\lambda & 8+5\lambda & 9+4\lambda & 3+2\lambda \end{pmatrix}$

$$= E_{32}(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, και:

$E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$, $\lambda \neq 0$

NO:
Date: 27/10/2017

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, και εκτελέσει στις γραμμές του A p το πλήθος στοιχειώδεις πράξεις, θα προκύψει ένας πίνακας B. Τότε, υπάρχουν πίνακες $E_1, E_2, \ldots E_p \in M_m(\mathbb{K})$: $E_p \cdot E_{p-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = B$

Αν ο A είναι τετραγωνικός και ο $B = I_n$ τότε $E_p \cdot E_{p-1} \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n \Rightarrow$
$\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \ldots E_p^{-1}$ γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ καλείται κλιμακωτός ως προς τις γραμμές ή γ-κλιμακωτός $\Leftrightarrow$

1. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής είναι το 1.
   (τότε αυτό το 1 θα καλείται οδηγός)
2. Κάθε μηδενική έπεται κάθε μη-μηδενική γραμμής
3. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής, δηλαδή το 1 βρίσκεται στα δεξιά από το μημηδενικό στοιχείο κάθε προηγούμενης μη-μηδενικής γραμμής

Ένας γ-κλιμακωτός πίνακας καλείται ισχυρά γ-κλιμακωτός $\Leftrightarrow$

4. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής, δηλαδή το 1, είναι το μοναδικό στοιχείο στη στήλη στην οποία βρίσκεται αυτό το 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

γ-κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, γ-κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ισχυρά γ-κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ισχυρά γ-κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, δεν είναι γ-κ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, δεν είναι γ-κλ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ γ-κλιμακωτός

NO:
Date: 31/10/2017

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
Στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A:
① $\Gamma_j \mapsto \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$, $1 \le i, j \le m$
② $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$, $1 \le i, j \le m$
③ $\Gamma_i \mapsto \lambda\Gamma_i$, $1 \le i \le m$ $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda \ne 0$

Στοιχειώδεις Πίνακες:
① $E_{ij}(\lambda) \xleftarrow{\lambda\Gamma_j + \Gamma_i \mapsto \Gamma_i} I_n$
② $E_{ij} \xleftarrow{\Gamma_j \leftrightarrow \Gamma_i} I_n$
③ $E_i(\lambda) \xleftarrow{\lambda\Gamma} I_n$

Εκτέλεση μια στοιχειωδούς πράξης ~~στο~~ στις γραμμές του mxn πίνακα A αντιστοιχεί σε πολ/μο του A απο τα αριστερά με τον αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα.

Ιδιότητες στοιχειωδών πινάκων

① Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι:
$|E_{ij}(\lambda)| = 1$, $|E_{ij}| = -1$, $|E_i(\lambda)| = \lambda \ne 0$
② $E_{ij}(\lambda) = E_{ij}(-\lambda)$, $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$

Συμπέρασμα: Δηλαδή αντίστροφοι στοιχειωδών πινάκων είναι στοιχειώδεις πίνακες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 + \Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{7}\Gamma_2}$$

NO:
Date: 31/10/17

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

← ισχυρά γ-κλιμακωτός

αυτός ο πίνακας είναι γ-κλιμακωτός
αλλά όχι ισχυρά γ-κλιμακωτός

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \longleftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 12 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 + \Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 12 & 14 \\ 0 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & -14 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 12 & 14 \\ 0 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{14}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 12 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma$$

← γ-κλιμακωτός

Οι πίνακες B και Γ είναι κλιμακωτές μορφές του A, και B

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ GAUSS ΓΙΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΣΕ ΙΣΧΥΡΑ γ-ΚΛΙΜΑΚΩΤΟ.

ΒΗΜΑ 1 Αν ο πίνακας A είναι γ-κλιμακωτός, ο αλγόριθμος σταματάει

ΒΗΜΑ 2 Βρίσκουμε τον μικρότερο δείκτη j εκείνης της στήλης που έχει ένα μη-μηδενικό στοιχείο $a_{ij} \neq 0$ στην i-γραμμή

Τότε: $\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_1$ και τότε στον πίνακα θα προκύψει το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής θα είναι a_{ij}

ΒΗΜΑ 3 Στον πίνακα που προκύπτει από το ΒΗΜΑ 2:

$$\Gamma_1 \longmapsto \frac{1}{a_{ij}} \Gamma_1$$

NO:
Date: 31/10/2017

και τότε στον πίνακα που προκύπτει το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι το 1: οδηγός

<u>ΒΗΜΑ ④</u> Αφαιρούμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από τις υπόλοιπες γραμμές:

$$\Gamma_i \longmapsto \Gamma_i - \alpha_{ij}\Gamma_1$$

έτσι ώστε τα στοιχεία του πίνακα που θα προκύψει κάτω από το 1 να είναι όλα ίσα με μηδέν.

<u>ΒΗΜΑ ⑤</u> Επαναλαμβάνουμε τα Βήματα ①-④ για τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα που έχει προκύψει από το <u>ΒΗΜΑ ④</u>

Μετά την εκτέλεση του <u>ΒΗΜΑΤΟΣ ⑤</u> ο πίνακας A έρθει σε γ-κλιμακωτή μορφή

<u>ΒΗΜΑ ⑥</u> Έστω ότι η τελευταία μη-μηδενική γραμμή του πίνακα ο οποίος έχει προκύψει μετά το ΒΗΜΑ ⑤ είναι η Γ_i και υποθέτουμε ότι ο <u>οδηγός</u> της i-γραμμής, δηλαδή το 1 είναι στην s-στήλη. Τότε εκτελώντας τις στοιχειώδεις πράξεις $\Gamma_k \longmapsto \Gamma_k - \alpha_{ks}\Gamma_i$
$1 \le k \le i-1$

Τότε ο πίνακας που θα προκύψει, θα είναι εκ' κατασκευής ισχυρά γ-κλιμακωτός.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \overset{E_{12}A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 3\Gamma_1} \overset{E_{31}(-3)E_{12}A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto -\frac{1}{3}\Gamma_3} \overset{E_3(-\frac{1}{3})E_{31}(-3)E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$ ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A

$$E_{13}(-1)E_3(-\tfrac{1}{3})E_{31}(-3)E_{12}\cdot A = B$$

NO:
Date: 31/10/2017

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και εκτελέσουμε τον αλγόριθμο του Gauss στον A, τότε θα προκύψει ένας ισχυρά γ-κλιμακωτός πίνακας B. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots E_p$:

$$\boxed{E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = B \quad *}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ και έστω η σχέση (*). Τότε είτε όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του B είναι 0 ή ο $B = I_n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι η τελευταία γραμμή του B περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα για κάθε $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$: είτε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος (όταν η τελευταία γραμμή στην ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή A είναι η μηδενική)

είτε από την σχέση (*) $E_p E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$ Δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ θεωρούμε τον πίνακα $(A|I_n)$ Με τον αλγόριθμο του Gauss μετατρέπουμε τον $(A|I_n)$ στην ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του και τότε έστω ότι αυτή είναι ο πίνακας $(B|A')$

Τότε:
- Αν $B \neq I_n$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος
- Αν $B = I_n$ τότε ο A: αντιστρέψιμος και $\boxed{A^{-1} = A'}$